Pommes, poires, abricots ...

$$\begin{array}{cccccc} & F & R & U & I & T \\ + & R & O & U & G & E \\ \hline C & E & R & I & S & E \end{array}$$

Pour résoudre ce problème, la difficulté est de savoir quand des retenues apparaîtront, mais c'est aussi grâce aux retenues que nous allons pouvoir donner certaines valeurs au départ.

La première chose que l'on peut déduire est la suivante : comme $T + E = E$ ceci implique que $\boxed{T = 0}$.

De plus, si on additionne deux nombres de cinq chiffres, le résultat ne peut qu'avoir cinq ou six chiffres. Ici un résultat à cinq chiffres est impossible puisque cela forcerait $C = 0$ et ainsi T et C auraient la même valeur, ce qui est impossible. Dans le cas d'un résultat à six chiffres le résultat ne peut qu'avoir comme premier digit 1, car c'est nécessairement une retenue. Ainsi $\boxed{C = 1}$.

On remarque une autre colonne intéressantes, car elle ne contient que deux lettres

$$R + O = R.$$

À nouveau, on pourrait croire que $R = 0$, mais c'est impossible puisque 0 est déjà attribué à T. La seule manière de résoudre cette difficulté est d'imaginer qu'une retenue égale à 1 s'ajoute à cette addition et le résultat doit être supérieur ou égal à 10. On obtient donc

$$R + O + 1 = R + 10$$

et donc $\boxed{\text{O=9}}$.

Si on récapitule, nous avons déterminé trois lettres : $T = 0$, $C = 1$ et $O = 9$.

$$\begin{array}{cccccc} & F & R & U & I & 0 \\ + & R & 9 & U & G & E \\ \hline 1 & E & R & I & S & E \end{array}$$

Il reste à attribuer les valeurs $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ aux lettres $\{F; R; U; I; G; E; S\}$.

Nous avons encore une information obtenue de nos précédentes réflexions : nous avons dû supposer que

$$U + U + \{\text{éventuelle retenue}\} \geq 10$$

pour avoir la retenue dans $R + O + 1 = R + 10$. Ceci restreint les valeurs possibles de U au quatre chiffres $\{5; 6; 7; 8\}$. Étudions chacun de ces cas.

Supposons que $U = 5$: dans ce cas, notre addition s'écrit :

$$\begin{array}{cccccc} & F & R & 5 & I & 0 \\ + & R & 9 & 5 & G & E \\ \hline 1 & E & R & I & S & E \end{array}$$

Il y a deux possibilités :
- soit $I + G < 10$, autrement dit, s'il n'y a pas de retenue : dans ce cas $I = 0$, ce qui est impossible puisque le 0 est déjà attribué à T.
- soit $I + G \geq 10$, autrement dit, s'il y a une retenue : dans ce cas $I = 1$, ce qui est aussi impossible puisque le 1 est déjà attribué à C.

Il n'y a donc pas de solutions à ce calcul si on suppose U=5.

Supposons que $U = 6$: dans ce cas, notre addition s'écrit :

$$\begin{array}{cccccc} & F & R & 6 & I & 0 \\ + & & R & 9 & 6 & G & E \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 6 & I & 0 \\ + & & R & 9 & 6 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & I & S & E \end{array}$$

Comme avant, nous pouvons supposer soit que $I + G \geq 10$, soit que $I + G < 10$, ce qui mène à deux valeurs possibles de I : $I = 3$ ou $I = 2$. Étudions encore ces deux sous-cas.

Supposons que $I = 3$. Dans ce cas, l'addition s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 6 & 3 & 0 \\ + & & R & 9 & 6 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & 3 & S & E \end{array}$$

Il reste donc à attribuer les chiffres suivants $\{2; 4; 5; 7; 8\}$ au lettres $\{F; R; G; E; S\}$. Regardons l'équation $3+G = S+10$, autrement dit $G = S+7$ ce qui est impossible pour les chiffres restants. Le choix $U = 6$ et $I = 3$ n'amène à aucune solution.

Supposons que $I = 2$. Dans ce cas, l'addition s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 6 & 2 & 0 \\ + & & R & 9 & 6 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & 2 & S & E \end{array}$$

Il reste donc à attribuer les chiffres suivants $\{3; 4; 5; 7; 8\}$ au lettres $\{F; R; G; E; S\}$. Regardons l'équation $2 + G = S$. Les couples $(G; S)$ possibles sont les suivants : $(3; 5)$ et $(5; 7)$. Étudions une fois encore ces deux sous-cas.

Si $G = 3$ et $S = 5$, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 6 & 2 & 0 \\ + & & R & 9 & 6 & 3 & E \\ \hline & 1 & E & R & 2 & 5 & E \end{array}$$

Dans ce cas, nous devons attribuer les chiffres $\{4; 7; 8\}$ au lettres $\{F; R; E\}$. La dernière relation

$$F + R + 1 = E + 10$$

avec les valeurs possibles donne trois possibilités pour les choix de F et R :

- $\{F; R\} = \{7; 8\}$ qui donne $8+7+1 = 16$ et donc $E = 6$, ce qui est impossible puisque nous avons supposé $U = 6$,
- $\{F; R\} = \{4; 8\}$ qui donne $8 + 4 + 1 = 13$ et donc $E = 3$, qui est à nouveau impossible puisque nous avons supposé $G = 3$,
- $\{F; R\} = \{4; 7\}$ qui donne $7 + 4 + 1 = 12$ et donc $E = 2$, qui est aussi impossible puisque nous avons supposé $I = 2$.

Le choix $G = 3$ et $S = 5$ doit par conséquent être rejeté.

Si $G = 5$ et $S = 7$, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 6 & 2 & 0 \\ + & & R & 9 & 6 & 5 & E \\ \hline & 1 & E & R & 2 & 7 & E \end{array}$$

Dans ce cas, nous devons attribuer les chiffres $\{3; 4; 8\}$ au lettres $\{F; R; E\}$. Etudions à nouveau la relation

$$F + R + 1 = E + 10.$$

En remplaçant avec les valeurs posssibles, nous obtenons :
- $\{F; R\} = \{3; 4\}$ qui donne $3 + 4 + 1 = 8 < 10$, ce qui est impossible puisqu'il faut une retenue,
- $\{F; R\} = \{4; 8\}$ qui donne $3 + 8 + 1 = 12$ et donc $E = 2$, qui est impossible puisque nous avons supposé $I = 2$,
- $\{F; R\} = \{4; 7\}$ qui donne $4 + 8 + 1 = 13$ et donc $E = 3$, qui est, cette fois, une solution possible !

Comme rien ne permet de différencier R de F, nous avons deux solutions possibles : $\boxed{F = 8,\ R = 4 \text{ et } E = 3}$ ou $\boxed{F = 4,\ R = 8 \text{ et } E = 3}$.

Si on récapitule, on a pour l'instant les deux solutions suivantes :

	F	R	U	I	T	O	G	E	C	S
Première solution	4	8	6	2	0	9	5	3	1	7
Deuxième solution	8	4	6	2	0	9	5	3	1	7

Continuons toutefois notre recherche systématique des solutions.

Supposons que $U = 7$: dans ce cas, notre addition s'écrit :

$$\begin{array}{cccccc} & & F & R & 7 & I & 0 \\ + & & R & 9 & 7 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & I & S & E \end{array}$$

À nouveau deux valeurs de I sont possibles : soit $I = 4$ s'il n'y pas de retenue, soit $I = 5$.

Supposons que $I = 4$. Dans ce cas, l'addition s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 7 & 4 & 0 \\ + & & R & 9 & 7 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & 4 & S & E \end{array}$$

Peut-on attribuer les valeurs restantes $\{2; 3; 5; 6; 8\}$ aux lettres $\{F; R; G; S; E\}$ de telle sorte que l'addition soit valable ? On sait que $4 + G = S$, les seules valeurs possibles sont $G = 2$ et $S = 6$. Il reste donc à attribuer les valeurs $\{3; 5; 8\}$ aux lettres $\{F; R; E\}$ de telle sorte que

$$F + R + 1 = E + 10.$$

- si $\{F; R\} = \{3; 5\}$, on a $3 + 5 + 9 = 8 < 10$, ce qui est impossible puisqu'il faut une retenue,
- si $\{F; R\} = \{3; 8\}$, on a $3 + 8 + 1 = 12$ qui n'est pas égal $10 + 5$,
- si $\{F; R\} = \{5; 8\}$, on a $5 + 8 + 1 = 14$ qui n'est pas égal $10 + 4$.

Le choix $U = 7$ et $I = 4$ ne mène à aucune solution.

Supposons que $I = 5$. Dans ce cas, l'addition s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 7 & 5 & 0 \\ + & & R & 9 & 7 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & 5 & S & E \end{array}$$

Peut-on attribuer les valeurs restantes $\{2; 3; 4; 6; 8\}$ aux lettres $\{F; R; G; S; E\}$ de telle sorte que l'addition soit valable ? L'égalité $G = S + 5$ ne peut être satisfaite que par le choix de $G = 8$ et $S = 3$. Or, les valeurs restantes $\{2; 4; 6\}$ ne permettent pas de résoudre $F + R + 1 = E$ (on aurait $2 + 4 + 1 = 7$). Le choix $U = 7$ et $I = 5$ ne mène donc à aucune solution.

Il n'y a donc pas de solutions à ce calcul si on suppose $U = 7$.

Supposons que $U = 8$ **:** dans ce cas, notre addition s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 8 & I & 0 \\ + & & R & 9 & 8 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & I & S & E \end{array}$$

À nouveau deux valeurs de I sont possibles : soit $I = 6$ s'il n'y pas de retenue, soit $I = 7$.

Supposons que $I = 6$**.** Dans ce cas, l'addition s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 8 & 6 & 0 \\ + & & R & 9 & 8 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & 6 & S & E \end{array}$$

Ce choix implique que $6 + G = S$ où G et S peuvent prendre des valeurs de l'ensemble $\{2; 3; 4; 5; 7\}$. Or, il n'existe pas de valeurs satisfaisant cette condition puisque la condition $G > 1$ implique $G + 6 > 7$.

Supposons que $I = 7$**.** Dans ce cas, l'addition s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F & R & 8 & 7 & 0 \\ + & & R & 9 & 8 & G & E \\ \hline & 1 & E & R & 7 & S & E \end{array}$$

Ce choix implique que $7 + G = S + 10$ où G et S peuvent prendre des valeurs de l'ensemble $\{2; 3; 4; 5; 6\}$. Deux choix de G et S pourraient faire l'affaire : $G = 6$ et $S = 3$ ou $G = 5$ et $S = 2$.

Si $G = 6$ **et** $S = 3$**,** il n'est pas possible de satisfaire $F + R + 1 = E + 10$ avec les valeurs restantes $\{2; 4; 5\}$. En effet,

- si $\{F; R\} = \{4; 5\}$, on a $4 + 5 + 1 = 10$, et donc $E = 0$, qui est impossible puisque nous avons trouvé $T = 0$,
- si $\{F; R\} = \{2; 4\}$ ou $\{F; R\} = \{2; 5\}$, on a $2 + 4 + 1 < 10$ ou $2 + 5 + 1 < 10$, ce qui est impossible puisqu'il faut une retenue.

Si $G = 5$ **et** $S = 2$**,** il n'est non plus pas possible de satisfaire $F + R + 1 = E + 10$ avec les valeurs restantes $\{3; 4; 6\}$. En effet,

- si $\{F; R\} = \{4; 6\}$, on a $4 + 6 + 1 = 11$, et donc $E = 1$, qui est impossible puisque nous avons trouvé $C = 1$,
- si $\{F; R\} = \{3; 6\}$, on a $3 + 6 + 1 = 10$, et donc $E = 0$, qui est impossible puisque nous avons trouvé $T = 0$,
- si $\{F; R\} = \{3; 4\}$, on a $3 + 4 + 1 < 10$, ce qui est impossible puisqu'il faut une retenue.

Le choix U=8 n'amène à aucune autre solution.

Les seules solutions sont donc bien

$$\begin{array}{ccccccc} & & 4 & 8 & 6 & 2 & 0 \\ + & & 8 & 9 & 6 & 5 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 2 & 7 & 3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & 8 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ + & & 4 & 9 & 6 & 5 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 3 \end{array}$$